1) • $$M^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

• $$M^3=M^2M$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=M\,.$$

• $$M^4=M^3M=M\,M=M^2.$$

• $$M^5=M^4M=M^2M=M^3=M\,.$$

2) D'après 1), on peut conjecturer que, pour tout entier naturel n,

$$M^{2n+1}=M .$$

Montrons ces égalités par récurrence.

- La proposition est vraie pour $n=0$ car

$$M^{2\times 0+1}=M^1=M .$$

- Supposons $M^{2n+1}=M$ pour un entier naturel n fixé

et montrons qu'alors $M^{2(n+1)+1}=M$.

$$M^{2(n+1)+1}=M^{2\mathrm{n}+3}$$

$$=M^{2\mathrm{n}+1}M^2$$

$$=M\,M^2$$ ($M^{2n+1}=M$ par hypothèse de récurrence)

$$=M^3$$

$$=M$$ ($M^3=M$ d'après 1)).

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a $M^{2n+1}=M$ pour tout entier

naturel n.